פיתרון קבץ תרגילים 3

1) נחשב אינטגרל

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(e^{it})|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{k=0}^{n}p_k e^{ikt}\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{n}\overline{p_\ell}\, e^{-i\ell t}\Big)dt=$$

$$\sum_{k,\ell=0}^{n}\frac{1}{2\pi}p_k\overline{p_\ell}\int_0^{2\pi}e^{i(k-\ell)t}dt$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(k-\ell)t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(\cos(k-\ell)t+i\sin(k-\ell)t\big)dt=$$

$$=\begin{cases}1 & k=\ell\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

לכן $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(e^{it})|^2dt=\sum_{k=0}^{n}|p_k|^2$

מהנתון $1\ge\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(e^{it})|^2dt$ לכן $\sum|p_k|^2\le 1$

לכן $|p_i|\le 1$ לכל i

2) אם $\sum|z_n|$ מתכנס ! $\sum z_n$ מתכנס תמיד.

נראה שאם $\sum|z_n|$ מתבדר אז $\sum z_n$ מתבדר.

נסמן $z_n=(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)\cdot r_n$

יקום כ $\sum r_n$ מתבדר. $-\alpha\le\theta_n\le\alpha$

ל $0<\alpha<2\pi$ לכן $0<\cos\alpha\le\cos\theta_n$

לכן $\cos\alpha(\sum r_n)\le\sum r_n\cos\theta_n=\sum \mathrm{Re}\, z_n$

מתבדר. לכן $\sum z_n$ גם מתבדר.

3) נזכיר נוסח של משפט אבל

<u>משפט</u>: תהיינה $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ סדרות של מספרים ממשיים כך ש:

1) $b_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

2) קיים M כך ש $\left|\sum_{l=1}^{m} a_l\right| \leq M$ לכל m.

אז $\sum a_n b_n$ מתכנס.

נסתכל בטור $\sum \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$

יהי $a_n = e^{in\theta}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

אם $\theta = 2\pi k$ אז טור זה $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ מתבדר

אחרת $1 \neq e^{in\theta}$! לכן

$$\left|\sum_{n=0}^{m} e^{in\theta}\right| = \left|\frac{1-e^{i(m+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|} = M$$

שני התנאים של משפט אבל מתקיים

לכן הטור מתכנס עבור $\theta \neq 2\pi k$.

4) נסמן $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. אז

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

לכן

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = C(r,\theta) + iS(r,\theta)$$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-r\cos t - ir\sin t} = \frac{1-r\cos t + ir\sin t}{1+r^2-2r\cos\theta}$$

וזה כנדרש.

5)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

$$\lim \left|\frac{n^2}{3^n}\right|^{1/n} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3.$$

$$\lim \left|\frac{1}{(n!)^2}\right|^{1/n} = 0 \Rightarrow R = \infty$$

6) נגדיר $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$

ע/כ $\cos 5\varphi = Re(z^5) \Leftarrow z^5 = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi$

$\sin 3\varphi = Im(z^3)$ $z^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$

$Re(z^5) = Re(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 =$

$\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$

$Im(z^3) = Im(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$

7) $z^z = e^{\ln z \cdot z}$

לכן עלינו להגדיר פונקצ"ית $\ln z$ המקיימת

$$e^{\ln z} = z$$

יהי $z = re^{i\alpha}$ נמצא חלק ממשי ומדומה של $\ln z$. יהי

$$\ln z = x + iy$$

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = z = re^{i\alpha}$$

לכן $\begin{cases} e^x = r \\ y = \alpha + 2\pi k \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x = \ln r \\ y = \alpha\ (+2\pi k) \end{cases}$ נקח $k=0$.

$$\ln z = \ln r + i\alpha$$

$$e^{\ln z \cdot z} = e^{(\ln r + i\alpha)(r\cos\alpha + ir\sin\alpha)} = e^{\ln r \cdot r\cos\alpha - \alpha\sin\alpha\, r} \cdot e^{i(\alpha r\cos\alpha + \ln r \cdot r\sin\alpha)} = \left(\frac{r^{\cos\alpha}}{e^{\alpha\sin\alpha}}\right)^r \left(\cos(\alpha r\cos\alpha + \ln r \cdot r\sin\alpha) + i\sin(\alpha r\cos\alpha + \ln r \cdot r\sin\alpha)\right)$$

8) $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow \sin i = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = i\left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)$

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow \cos i = \frac{e + e^{-1}}{2}$

8) (המשך)

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{+iz} - e^{-iz}}{(e^{iz} + e^{-iz})i} +$$

$$\tan(1+i) = \frac{e^{-1+i} - e^{1-i}}{i(e^{-1+i} + e^{1-i})}$$

ניתן לפשט את
עם הנוסחה
בסכרת

$$e^{i} = \cos 1 + i \sin 1$$

9)

$$\sinh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \qquad \overline{e^{z}} = e^{\overline{z}}$$

$$\cosh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$$

$$|\cos(z)|^2 = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} \cdot \frac{e^{-y-ix} + e^{y+ix}}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2y} + e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{2y}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cosh(2y) + \cos 2x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} + 2\cos^2 x - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2y} - 2 + e^{-2y}}{2}\right) + \cos^2 x =$$

$$= \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)^2 + \cos^2 x = \sinh^2 y + \cos^2 x.$$